Lycée Laymoune 2ème Bac Pro

Les nombres complexes - 2ème Partie -

① Affixe d'1 pt et d'1 vecteur :

Dans le plan complexe on considère le pt : $M(x;y)$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

. $z = x+iy$ est l'affixe de $M(x+iy)$

z est aussi l'affixe du vecteur : $\overrightarrow{OM}$

et on écrit : $\text{aff}(M) = z = x+iy$

et $\text{aff}(\overrightarrow{OM}) = z$

En général :

$$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = \text{aff}(B) - \text{aff}(A)$$

Exple un triangle ABC est isocèle en A $\Longleftrightarrow |\text{aff}(\overrightarrow{AB})| = |\text{aff}(\overrightarrow{AC})|$

② Mesure d'un angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) [2\pi]$$
$$\equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

Exple : Soient A, B, C et D tq :
$z_A = i$, $z_B = 2i$; $z_C = 4+i$ et :
$z_D = 4+3i$.
mq : $(AB) \parallel (CD)$

* Rappel : $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv 0 [2\pi]$
ou $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \pi [2\pi]$

$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
ou $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

EX:1 Soient : $A(1+2i)$; $B(-2+i)$ et : $C(-1-2i)$. calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

En déduire la nature de ABC.

EX:2 $A(1+i\sqrt{3})$; $B(-1-i)$
$C(-2-\sqrt{3}+i)$

1) calculer : $\text{aff}(\overrightarrow{BA})$; $\text{aff}(\overrightarrow{BC})$

2) En déduire la nature de ABC.

③ Les carrés dans $\mathbb{C}$:

Ecrire sous forme d'un carré les nombres complexes :

-1 ; 4 ; -4 ; -8 ;

Applications :
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les éq :
$z^2 = -1$; $z^2 = 4$; $z^2 = -4$

④ Equation de 2nd degré à coefficients réels.

$(E) : az^2 + bz + c = 0$ $\left(\begin{matrix} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a \neq 0 \end{matrix}\right)$

Le discriminant de (E) :

$\Delta = b^2 - 4ac$; il y a 3 cas :

1- si $\Delta = 0$ alors : unique solution (réelle) dans $\mathbb{C}$: $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

2- si $\Delta > 0$ alors :
deux solutions (réelles) dans $\mathbb{C}$:
$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

3- si $\Delta < 0$ il y a deux solutions complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$:

$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exple : $z^2 - 2z + 2 = 0$

mq : $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 1+i$ sont les solutions de l'éq.

EX : 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les éq :

1) $z^2 - 2z + 5 = 0$

2) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

3) $z^2 - (1+\sqrt{3})z + \sqrt{3} = 0$

EX : 4 on considère dans $\mathbb{C}$ l'éq :

(E) $z^2 - 2z + 2 = 0$

1°) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ (les solutions z_1 et z_2 sont tq : $Im(z_1) > 0$, $Im(z_2) < 0$)

2°) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

3°) Mq : $z_1^4 + z_2^4 = -8$

4°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct : $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les pts : $A(1-i)$ et $B(1+i)$.

4-a) Donner $\frac{1+i}{1-i}$ sous forme algébrique.

4-b) En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.
(EXAM.BAC)

Ex : 5 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'éq : (E) : $z^2 + 2z + 4 = 0$

2) On pose : $a = -1 + i\sqrt{3}$
$b = 2$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$

écrire $a-b$ et $c-b$ sous forme trigonométrique.

3) En déduire le module et un argument du nombre $\frac{c-b}{a-b}$

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe, on considère les pts A, B et C d'affixes respectives : a, b et c

Montrer que ABC est équilateral.
(EXAM de BAC)

EX : 6 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'éq :

$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

2°) On considère les pts A, B et C d'affixes respectives : $a = 8i$, $b = 4\sqrt{3} - 4i$ et $c = 2(4\sqrt{3} + 4i)$

montrer que : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3°) En déduire que le triangle ABC est équilateral.

Ex : 7 $P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$

1°) calculer $P(i)$ et $P(-i)$

2°) Trouver a, b et c dans $\mathbb{R}$ tq : pour tout $z \in \mathbb{C}$ on :

$P(z) = (z^2+1)(az^2 + bz + c)$

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'éq :
$P(z) = 0$

EX : 4| En utilisant la req précédente ; trouver la forme trigonométq de :

$z = 1 + i$ et de : $z' = \sqrt{3} + i$

⑧ propriétés de l'argument :

$$\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$$
$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \ [2\pi]$$
$$-\arg(z) = \pi + \arg(z) \ [2\pi]$$
$$\arg(z^n) = n \times \arg(z) \ [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \ [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$$

$z \neq 0$

$$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$
$$z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

EX : 5| Déterminer une écriture trigo. des nbrs :

$(1+i) \times (\sqrt{3}+i)$; $\overline{\sqrt{3}+i}$; $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

$\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}$; $(\sqrt{3}+i)^5$; $(1+i)^2 \times (\sqrt{3}-i)$

$\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$; $\left(\dfrac{i}{1-i}\right)^{2006}$; i^{100}

⑨ propts de la notation exponentielle.

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = (r \times r')e^{i(\theta+\theta')}$$
$$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta} \ ; \ -re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$$
$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \ ; \ \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$
$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$

Formule de MOIVRE :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

EX : 6| Donner la forme exp de nbrs :

$z_1 = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

$z_3 = 3i$; $z_4 = 8 + i8$

$z_5 = 7 - 7\sqrt{3}\,i$; $z_6 = \sqrt{\frac{3}{2}}(i-1)$

$z_7 = \dfrac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$; $z_8 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}$

$z_9 = (3+i)^4$; $z_{10} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⑩ Formule d'Euler :

$$(\forall \theta \in \mathbb{R}) ; \ \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

⑪ Notions géométriques :

La notion géométrique	La relation
Distance AB	$AB = \lvert z_B - z_A \rvert$
I centre de [AB]	$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
Mesure de $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}})$	$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$
A B et C sont alignés	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
ABC est un triangle rectangle au pt A	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r ; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$
ABC est isocèle en A	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1 ; \theta]$
ABC rectangle et isocèle en A.	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1 ; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$

EX : 12| A ; B deux pt d'affixes

$z_A = -1 + i$ $z_B = -\sqrt{2}\,i + \sqrt{2}$

① Placer les pts A et B.

② Mq les pts A ; B et O sont alignés. (Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$)

n° : 8

2ème Semestre